数理解析研究所講究録
630巻 1987年 9-13

Paths in k-edge-connected graphs

大阪市立大学工学部 岡村治子
(Haruko Okamura)

$G=(V(G), E(G))$ を辺に向きのない有限グラフ（多重辺を含んでもよい）とし、$V(G)$を点の集合、$E(G)$を辺の集合とする。

定義1. Gがk-辺連結（k-edge-connected）
$\Longleftrightarrow$ k本以上の辺を除去しないとGは非連結にならない。

2. Gの辺連度がk（$\lambda(G)=k$ であらわす）
$\Longleftrightarrow$ Gはk-辺連結だが、$(k+1)$-辺連結ではない。

3. Gが weakly k-linked
$\Longleftrightarrow$ Gの任意の点の対の組 $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \cdots (s_k, t_k)$ に対して（s_iとt_jは同じ点でもよい）、辺素な（i.e. 互いに辺を共有しない）パス $P_1, \cdots, P_k$ が存在し、P_iはs_iとt_iを結ぶ。

例1. 図-1のグラフをG_1とする。$\lambda(G_1)=3$ であり、G_1は weakly 3-linkedである。図-2は辺素な3本のパスP_1, P_2, P_3の例を与えている。

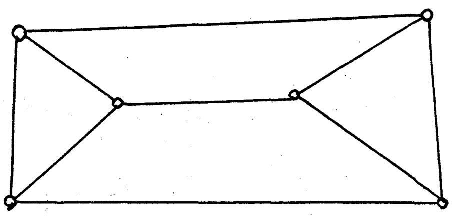

図-1

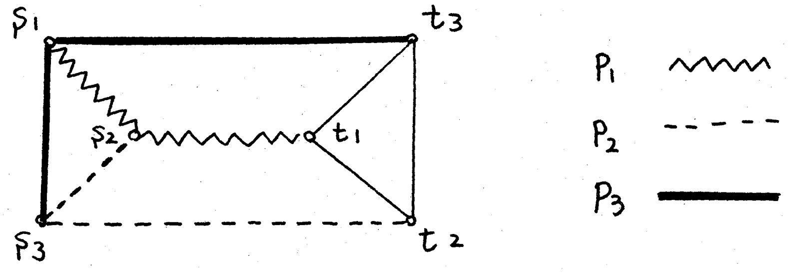

図-2

$$\left[\ \lambda(G) \geq n \Rightarrow G \text{ は weakly } k\text{-linked}\ \right]$$

となるnの値を考察する。

定義 4. $g(k) := \min\{n \mid \lambda(G) \geq n \Rightarrow G \text{ は weakly } k\text{-linked}\}$.

予想 1 (Thomassen [4]). $g(k) = \begin{cases} k & \text{if } k \text{ is odd,} \\ k+1 & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$

次のことが既知である。

$$g(k) \geq \begin{cases} k & \text{if } k \text{ is odd,} \\ k+1 & \text{if } k \text{ is even,} \end{cases}$$

$g(1)=1$, $g(2)=3$, $g(3)=3$ (Okamura [3]),

$g(4)=5$, $g(k) \leq 2k-3$ $(k \geq 4)$ (Hirata Kubota and Saito [1], Mader [2]).

次の結果がえられた。

定理 1. $g(k) \leq \begin{cases} \frac{3}{2}(k-1) & \text{if } k (\geq 3) \text{ is odd,} \\ \frac{3}{2}k - 1 & \text{if } k (\geq 4) \text{ is even.} \end{cases}$

Mader[2] は次の定理を使い、$g(3)=3$ を帰納法の最初に用いて $g(k)\leq 2k-3$ を証明し、同時に予想2を与えている。

定理2 (Mader). $k\geq 4$, $\lambda(G)\geq k$ のとき、Gの任意の2点 s, t に対して、sとtを結ぶパス P が存在して、

$$\lambda(G-E(P))\geq k-2.$$

($G-E(P)$ は G から P の辺を除いてえられるグラフをあらわす。)

予想2 (Mader). $k\geq 4$, $\lambda(G)\geq k$ のとき、Gの任意の2点 s, t に対して、sとtを結ぶ2本の辺素なパス P_1、P_2 が存在して $\lambda(G-E(P_1)-E(P_2))\geq k-2$.
(Mader[2] は $k=4$ のとき予想2を証明した)。

ここでは、kが偶数のとき予想2を証明し、定理1の証明に用いている。

定理3. $k\geq 4$ even, $\lambda(G)\geq k$, f_1, f_2, g は G の辺で $g\neq f_i$ $(i=1,2)$, sとtはGの点、
$\Rightarrow$ (1) f_1とf_2を通ってgを通らないサイクルCが存在して. $\lambda(G-E(C))\geq k-2$.

(2) fを通り、gを通らないsとtを結ぶパスPが存在して、
$$\lambda(G-E(P)) \geq k-2.$$
(ここでPとCは同じ点を2回以上通ってもよいが、辺は高々1回しか通れない。)

(定理1の証明の方針)

$\lambda(G) \geq n\ (\geq 4)$で点の対の組$(s_1,t_1),\cdots,(s_k,t_k)$が与えられているとき、定理3を用いて、適当な2組の点の対(s_i,t_i), (s_j,t_j) $(i \neq j)$に対して、それらを結ぶ辺素なパスP_1, P_2があって、GからP_1とP_2の辺を除いたグラフから少し変形してグラフG'を作り、$\lambda(G') \geq n-3$とできることを示す。$g(3)=3$を帰納法の最初に用いると定理1の結果がえられる。

定理1と定理3の証明は、J. Combinatorial Theory Ser. Bに掲載予定である。

References

1. T. Hirata, K. Kubota, and O. Saito, A sufficient condition for a graph to be weakly k-linked, J. Combin. Theory Ser. B 36 (1984), 85-94.

2. W. Mader, Paths in graphs, reducing the edge-connectivity only by two, Graphs and Combin. 1 (1985), 81-89.

3. H. Okamura, Multicommodity flows in graphs II, Japan. J. Math. 10 (1984), 99-116.

4. C. Thomassen, 2-linked graphs, European J. Combin. 1 (1980), 371-378.